Составители: А.А. Лобузов, Е.О. Сивкова,
И.Г. Тиханина, А.В. Шатина

Редактор Ю.И. Худак

Контрольные задания являются типовыми расчетами по курсу теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов. Типовые расчеты выполняются студентами в письменном виде и сдаются преподавателю до начала зачетной сессии. Приведенные в пособии вопросы к зачетам и экзаменам могут быть уточнены и дополнены лектором. При составлении контрольных заданий за основу были взяты типовые расчеты, разработанные коллективом кафедры высшей математики.

Печатаются по решению редакционно-издательского совета университета.

Рецензенты: С.Ф. Свистова
А.А. Абрамов

Литературный редактор Н.К. Костыгина

Подписано в печать 09.07.2004. Формат 60x84 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 1,63. Усл. кр.-отт. 6,52. Уч.-изд. л. 1,75.
Тираж 500 экз. С 510

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
“Московский государственный институт радиотехники, электроники и автоматики (технический университет)”
119454, Москва, пр. Вернадского, 78

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

ТИПОВОЙ РАСЧЕТ

ЗАДАЧА 1. [1]

Варианты 1, 11, 21. Из урны, содержащей M белых и N черных шаров, случайным образом и без возвращения извлекается m шаров. Случайная величина ξ – число белых шаров в выборке. Найти ряд распределения случайной величины ξ, $\mathrm{M}\xi$, $\mathrm{D}\xi$. Построить график функции распределения случайной величины ξ. Найти $P\left\{|\xi-\mathrm{M}\xi|<\sigma_\xi\right\}$.

Варианты 2, 12, 22. N студентов, среди которых Иванов и Петров, случайным образом занимают очередь за учебниками в библиотеку. Случайная величина ξ – число человек, разделяющих Иванова и Петрова в очереди. Найти ряд распределения случайной величины ξ, $\mathrm{M}\xi$, $\mathrm{D}\xi$. Построить график функции распределения случайной величины ξ. Найти $P\left\{|\xi-\mathrm{M}\xi|<\sigma_\xi\right\}$.

Варианты 3, 13, 23. Один игральный кубик имеет на гранях цифры от одного до шести, а на другом три пары граней помечены цифрами m, n, l. Случайная величина ξ – модуль разности числа очков, выпавших при бросании двух кубиков. Найти ряд распределения случайной величины ξ, $\mathrm{M}\xi$, $\mathrm{D}\xi$. Построить график функции распределения случайной величины ξ. Найти $P\left\{|\xi-\mathrm{M}\xi|<\sigma_\xi\right\}$.

вар.	M	N	m	вар.	N	вар.	m	n	l
1	6	4	4	2	5	3	1	3	6
11	5	5	3	12	6	13	2	4	5
21	4	5	3	22	7	23	1	2	3

Варианты 4, 14, 24. Наудачу выбирается n-значное число (предполагается, что старший разряд не равен нулю). Случайная величина ξ – число цифр 8 в записи числа. Найти ряд распределения случайной величины ξ, $\mathrm{M}\xi$, $\mathrm{D}\xi$. Построить график функции распределения случайной величины ξ. Найти $P\left\{|\xi-\mathrm{M}\xi|<\sigma_\xi\right\}$.

Варианты 5, 15, 25. Из колоды в 36 карт наудачу извлекают n карт. Найти ряд распределения случайной величины ξ – числа ту-

[1] Во всех задачах, если не оговорено заранее, события происходят независимо.

зов в выборке. $M\xi$, $D\xi$. Построить график функции распределения случайной величины ξ. Найти $P\left\{|\xi - M\xi| < \sigma_\xi\right\}$.

Варианты 6, 16, 26. Из колоды в 36 карт наудачу извлекают n карт. Найти ряд распределения случайной величины ξ – числа карт бубновой масти в выборке, $M\xi$, $D\xi$. Построить график функции распределения случайной величины ξ. Найти $P\left\{|\xi - M\xi| < \sigma_\xi\right\}$.

Варианты 7, 17, 27. Наудачу выбирается n-значное число (предполагается, что старший разряд не равен нулю). Случайная величина ξ – число нулей в записи числа. Найти ряд распределения случайной величины ξ, $M\xi$, $D\xi$. Построить график функции распределения случайной величины ξ. Найти $P\left\{|\xi - M\xi| < \sigma_\xi\right\}$.

вар.	n	вар.	n	вар.	n	вар.	n
4	3	5	4	6	4	7	3
14	4	15	5	16	5	17	4
24	5	25	6	26	6	27	5

Варианты 8, 18, 28. Стрелок производит несколько выстрелов в цель до первого попадания, имея всего четыре патрона. Вероятность попадания при одном выстреле равна p. Найти ряд распределения случайной величины ξ, $M\xi$, $D\xi$, где ξ – число неизрасходованных патронов. Построить график функции распределения случайной величины ξ. Найти $P\left\{|\xi - M\xi| < \sigma_\xi\right\}$.

Варианты 9, 19, 29. Вероятность ошибки при передаче символа A по каналу связи равна p_1, а при передаче символа B – p_2. Найти ряд распределения для числа ошибок ξ, если передается последовательность символов ABBA. Найти $M\xi$, $D\xi$. Построить график функции распределения случайной величины ξ. Найти $P\left\{|\xi - M\xi| < \sigma_\xi\right\}$.

Варианты 10, 20, 30. Орудие стреляет в цель до первого попадания, имея всего шесть снарядов. Вероятность попадания при каждом выстреле равна p. Найти ряд распределения для числа истраченных снарядов ξ. Найти $M\xi$, $D\xi$. Построить график функции распределения случайной величины ξ. Найти $P\left\{|\xi - M\xi| < \sigma_\xi\right\}$.

вар.	p	вар.	p_1	p_2	вар.	p
8	0,6	9	0,1	0,2	10	0,4
18	0,7	19	0,2	0,1	20	0,5
28	0,8	29	0,3	0,1	30	0,6

ЗАДАЧА 2.

Варианты 1-6. Радиоприемник принимает сигнал с вероятностью p. Найти вероятность того, что из N сигналов будет принято: а) не более M сигналов; б) два сигнала. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ – числа принятых сигналов, если было передано N сигналов.

Варианты 7-12. Вероятность попадания стрелка в мишень при одном выстреле равна p. Стрелок, имея практически неограниченный запас патронов, ведет стрельбу до первого попадания в мишень. Какова вероятность, что это событие произойдет: а) между M и N выстрелами включительно; б) до четвертого выстрела? Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ – числа выстрелов до первого попадания в мишень.

вар.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p	0,7	0,6	0,8	0,8	0,6	0,5	0,8	0,6	0,7	0,5	0,7	0,9
N	8	9	7	8	9	7	4	5	4	6	3	5
M	3	5	4	5	4	3	8	10	9	10	6	8

Варианты 13-18. Устройство содержит N одинаково надежных элементов, каждый из которых может отказывать с вероятностью p. Какова вероятность, что откажет: а) более двух элементов, б) хотя бы один элемент? Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ – числа отказавших элементов.

вар.	13	14	15	16	17	18
N	1000	500	200	800	600	300
p	0,003	0,01	0,005	0,02	0,001	0,01

Варианты 19-24. Радиотелеграфная станция принимает цифровой текст. Вероятность ошибочного приема любой цифры равна p. Считая приемы отдельных цифр независимыми событиями, найти вероятность того, что в тексте, содержащем N цифр: а) не более M цифр приняты с ошибкой, б) нет ошибок. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ – числа цифр, принятых с ошибкой.

вар.	19	20	21	22	23	24
p	0,01	0,03	0,02	0,02	0,01	0,03
N	100	200	500	200	500	1000
M	3	5	2	4	3	5

Варианты 25-30. На заводе N цехов. Независимо друг от друга в каждом цехе может произойти авария с вероятностью p. Найти вероятность того, что: а) произойдут аварии одновременно в двух и более цехах, б) не будет аварий. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ – числа аварий в N цехах.

вар.	25	26	27	28	29	30
N	10	7	9	8	10	6
p	0,05	0,1	0,2	0,1	0,2	0,05

ЗАДАЧА 3.

Варианты 1-6. Найти параметр A, математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ, плотность вероятности которой

$$f(x) = \begin{cases} \frac{A}{\sqrt{a^2-x^2}}, & x \in (-a, a), \\ 0, & |x| \geqslant a. \end{cases}$$

вар.	1	2	3	4	5	6
a	5	4	3	2	1	6

Найти $P\{0 < \xi < a/2\}$. Построить график плотности распределения вероятности случайной величины ξ.

Варианты 7-12. Найти параметр A, математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ, плотность вероятности которой

$$f(x) = \begin{cases} A(bx - x^2), & x \in [0, b], \\ 0, & x \notin [0, b]. \end{cases}$$

вар.	7	8	9	10	11	12
a	3	4	9	7	16	5

Найти $P\{1 < \xi < 2\}$. Построить график плотности распределения вероятности случайной величины ξ.

Варианты 13-18. Найти параметр A, математическое ожидание и дисперсию случайной величины, плотность вероятности которой $f(x) = Ae^{-b|x|}$. Найти $P\{0 < \xi < b/2\}$. Построить график плотности распределения вероятности случайной величины ξ.

вар.	13	14	15	16	17	18
b	8	2	4	1	3	5

Варианты 19-24. Известно, что время ξ безотказной работы радиолампы имеет показательное распределение. Найти математическое ожидание $M\xi$, если $P\{\xi < a\} = P$. Построить график плотности распределения вероятности случайной величины ξ.

Варианты 25-30. Известно, что время ξ безотказной работы радиолампы имеет показательное распределение. Найти $P\{\xi < a\}$, если $M\xi = m$. Построить график плотности распределения вероятности случайной величины ξ.

вар.	19	20	21	22	23	24	вар.	25	26	27	28	29	30
a	100	30	50	20	100	80	a	50	20	46	40	30	30
P	1/2	1/3	1/4	1/3	1/4	1/2	m	25	20	23	20	30	15

ЗАДАЧА 4.

Вариант 1. Измерительный прибор не имеет систематической ошибки, а средняя квадратическая ошибка равна 75. Какова вероятность, что ошибка измерения не превзойдет по абсолютной величине 45 (закон распределения – нормальный)?

Вариант 2. Точность изготовления деталей характеризуется систематической ошибкой 2 мм, а случайное отклонение распределено по нормальному закону со средней квадратической ошибкой 10 мм. Какова вероятность, что отклонение длины изделия от стандарта находится в пределах от 8 до 12 мм?

Вариант 3. Систематическая ошибка высотомера равна нулю, а случайные ошибки распределены по нормальному закону. Какую среднюю квадратическую ошибку должен иметь высотомер, чтобы с вероятностью 0,95 ошибка измерения высоты по абсолютной величине была меньше 50 м?

Вариант 4. Каким должен быть допуск отклонения размера детали от номинала, чтобы с вероятностью 0,9 отклонение было допустимым, если систематическая ошибка отклонения отсутствует, а средняя квадратическая равна 25 мм (закон распределения – нормальный)?

Вариант 5. Деталью высшего качества считается такая, у которой отклонение размера от номинала не превосходит по абсолютной величине 4.3 мк. Случайное отклонение распределено по нормальному закону. Найти среднюю квадратическую ошибку, если систематическая ошибка равна нулю, а вероятность того, что деталь высшего качества равна 0,99.

Вариант 6. Систематическая ошибка измерительного прибора равна нулю. Случайные ошибки распределены по нормальному закону. Найти среднюю квадратическую ошибку, если ошибка измерения не превосходит по абсолютной величине 0.5 с вероятностью 0.95.

Вариант 7. Деталь, изготовленная автоматом, считается годной, если отклонение ξ контролируемого размера от номинала не превышает 8 мм. Точность изготовления деталей характеризуется среднеквадратическим отклонением, равным 4 мм. Считая, что случайная величина ξ распределена нормально, выяснить, сколько процентов годных деталей изготавливает автомат.

Вариант 8. Стандартный вес производимых на заводе болванок составляет 1 т., а отклонение распределено по нормальному закону со средней квадратической ошибкой 0,05 т. Систематическая ошибка отсутствует. В каком интервале с вероятностью 0,99 находится вес болванки?

Вариант 9. Радиолокационная станция при измерении дальности дает систематическую ошибку 5 м, средняя квадратическая ошибка равна 10 м. Найти вероятность того, что случайная ошибка не превосходит по абсолютной величине 17 м. Закон распределения нормальный.

Вариант 10. Измерительный прибор не имеет систематической ошибки. Случайные ошибки распределены по нормальному закону, и с вероятностью 0,8 они не превосходят по абсолютной величине 12 мм. Найти среднюю квадратическую ошибку.

Вариант 11. Автомат по нарезанию гвоздей длиной 80 мм в нормальном режиме имеет случайную ошибку, распределенную по нормальному закону. Систематическая ошибка отсутствует, средняя квадратическая ошибка равна 0,5 мм. В каком интервале с вероятностью 0,999 будет находиться длина гвоздя?

Вариант 12. Прибор, контролирующий напряжение, имеет случайную ошибку в показаниях, распределенную по нормальному закону. Систематическая ошибка отсутствует. Случайная ошибка по абсолютной величине не превосходит 15 В с вероятностью 0.8. Найти среднюю квадратическую ошибку.

Вариант 13. Деталь принимается ОТК, если ее диаметр отклоняется по абсолютной величине от стандартного не более чем на 2 мм. Отклонение - случайная величина, распределенная по нормальному закону с систематической ошибкой 0.5 мм и среднеквадратическим отклонением 1 мм. Найти вероятность того, что деталь принимается.

Вариант 14. При испытании орудия отклонение снаряда по дальности распределено по нормальному закону с математическим ожиданием, равным нулю, и среднеквадратическим отклонением, равным 25 м. Найти вероятность того, что отклонение по дальности по абсолютной величине не превосходит 12 м.

Вариант 15. Максимальная скорость самолетов определенного типа распределена по нормальному закону с математическим ожиданием 420м/с и среднеквадратическим отклонением 25 м/с. Найти вероятность того, что при испытаниях самолета этого типа его максимальная скорость будет изменяться от 390 м/с до 440 м/с.

Вариант 16. Глубина моря измеряется прибором, систематическая ошибка которого равна нулю, а случайная распределена по нормальному закону. Найти среднеквадратическое отклонение, если при определении глубины ошибка с вероятностью 0,95 составит не более 15 м.

Вариант 17. Среднее значение расстояния до ориентира равно 1250 м. Средняя квадратическая ошибка измерения прибора E=40 м, систематическая ошибка отсутствует. С вероятностью 0,999 определить максимальную ошибку измерения расстояния.

Вариант 18. Срок службы электрической лампы является случайной величиной, распределенной по нормальному закону с средним квадратическим отклонением 15 ч. Найти математическое ожидание, если с вероятностью 0,99 срок службы лампы более 300 ч.

Вариант 19. Время изготовления детали распределено по нормальному закону с математическим ожиданием 5,8 с и среднеквадратическим отклонением 1,9 с. Какова вероятность, что для изготовления детали потребуется от 5 до 7 с?

Вариант 20. Рассеивание скорости снаряда подчинено нормальному распределению и с вероятностью 0,95 не превосходит по абсолютной величине 2 м/с. Найти отклонение рассеивания. Систематическая ошибка отсутствует.

Вариант 21. При измерении заряда электрона ошибки распределены по нормальному закону, и измерения не имеют систематической ошибки. Найти с вероятностью 0,99 максимальную по абсолютной величине ошибку, если средняя квадратическая ошибка равна 0,05 абсолютных электростатических единиц.

Вариант 22. Измерения дальномера не имеют систематической ошибки, а случайные ошибки распределены нормально. Найти среднюю квадратическую ошибку, если при определении дальности цели абсолютная величина ошибки с вероятностью 0,9 не превосходит 15 м.

Вариант 23. При испытании регистрируется время выхода из строя прибора, которое является случайной величиной, распределенной по нормальному закону с математическим ожиданием 400 ч и среднеквадратическим отклонением 50 ч. Найти вероятность того, что прибор проработает безотказно от 300 до 500 ч.

Вариант 24. Отклонение размера детали от номинала подчинено нормальному закону. Систематической ошибки нет. С вероятностью 0,95 отклонение по абсолютной величине не превышает 2 мк. Найти среднеквадратическую ошибку.

Вариант 25. Отклонение диаметров валиков от заданных размеров подчинено нормальному закону без систематической ошибки и со средней квадратической ошибкой 5 мк. Найти вероятность того, что отклонение по абсолютной величине не превысит 10 мк.

Вариант 26. Отклонение размера изделия от номинала распределено по нормальному закону с нулевой систематической ошибкой. Найти среднюю квадратическую ошибку, если вероятность того, что абсолютная величина отклонения не превышает 5 мм, равна 0,95.

Вариант 27. Прибор для измерения высоты имеет систематическую ошибку 15 м и среднюю квадратическую ошибку 10 м. Найти вероятность того, что ошибка по абсолютной величине не превзойдет 20 м. Закон распределения ошибок нормальный.

Вариант 28. При стрельбе из орудия отклонение от цели по дальности подчиняется нормальному закону, систематической ошибки нет. Найти среднеквадратическое отклонение, если с вероятностью 0,94 абсолютная величина отклонения дальности не превосходит 5 метров.

Вариант 29. Средняя квадратическая ошибка измерения длины

детали равна 0,5 мк. Систематическая ошибка отсутствует. Найти наибольшую по абсолютной величине ошибку, которую можно допустить с вероятностью 0,9. (Закон распределения нормальный).

Вариант 30. Скорость лодки – случайная величина, распределенная нормально с математическим ожиданием 10 км/ч и среднеквадратическим отклонением 5 км/ч. Найти вероятность того, что скорость будет не менее 8 км/ч и не более 15 км/ч.

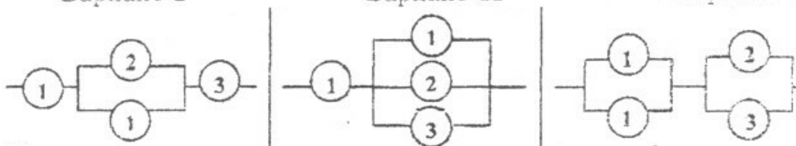
ЗАДАЧА 5.

Варианты 1, 11, 21. Пара одинаковых игральных костей бросается на стол N раз. Найти: а) вероятность того, что сумма очков 6 выпадет не менее M раз; б) вероятность того, что частота появления указанной суммы очков отличается от вероятности того, что выпадет сумма очков 6, не более, чем на ε.

вар.	N	M	ε	вар.	N	M	ε	вар.	N	M	ε
1	100	12	0,02	11	120	15	0,01	21	150	20	0,05

Варианты 2, 12, 22. Прибор пропускает электрический ток по схеме, указанной на рисунке:

Вариант 2 Вариант 12 Вариант 22



Предполагается, что отказы элементов являются событиями, независимыми в совокупности. Вероятности безотказной работы элементов за цикл работы равны $p_1 = 0,75$, $p_2 = 0,8$, $p_3 = 0,9$. Сколько нужно произвести циклов работы прибора, чтобы с вероятностью 0,92 можно было ожидать отклонение частоты отказа прибора от вероятности отказа на абсолютную величину, меньшую чем 0,01? Какова вероятность, что при проведении 300 циклов работы прибора число отказов заключено между 40 и 80 включительно ?

Варианты 3, 13, 23. На отрезке длины L наугад поставлены две точки X и Y. Событие А:

вар. 3	точка X ближе к точке Y, чем к правому концу отрезка
вар.13	точка X ближе к точке Y, чем к середине отрезка
вар.23	из полученных 3 отрезков можно построить треугольник

Сколько раз надо произвести указанный опыт, чтобы отклонение частоты события A от его вероятности не более чем на 0.02 имело вероятность 0.96? Какова вероятность того, что при проведении 400 опытов число появлений события A более 20?

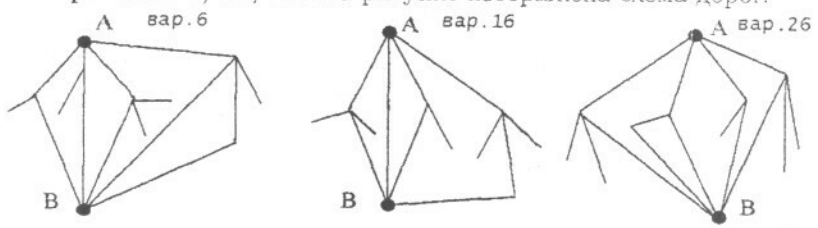
Варианты 4, 14, 24. Имеется N семей, в каждой из которых n детей. Считая, что вероятности рождения мальчика и девочки одинаковы, найти: а) вероятность того, что из N семей число семей, имеющих k_1 мальчиков, меньше M_1, б) вероятность того, что из N семей число семей, имеющих k_2 мальчиков, заключено между M_1 и M_2 включительно.

вар.	N	n	k_1	k_2	M_1	M_2
4	200	4	1	2	40	100
14	250	5	2	1	50	110
24	300	6	3	2	60	120

Варианты 5, 15, 25. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна p. Стрелок получает приз в том случае, если он поразил мишень с первого, второго или третьего выстрела. Найти: а) вероятность того, что частота получения приза отклонится по абсолютной величине от вероятности получения приза не более чем на ε, если стрельбу производило N человек; б)вероятность того, что из N участников приз получат не более M.

вар.	p	ε	N	M
5	0,1	0,04	200	15
15	0,3	0,05	250	60
25	0,2	0,06	300	50

Варианты 6, 16, 26. На рисунке изображена схема дорог.



Туристическая группа выходит из пункта A и далее на развилке дорог дальнейший путь выбирает наудачу. Найти: а) вероятность

того, что из 100 туристических групп не менее 40 попадут в пункт B, б) вероятность того, что частота прихода в пункт B отклонится по абсолютной величине от вероятности прихода в этот пункт не более чем на 0.1, если по маршруту прошло 200 туристических групп.

Варианты 7, 17, 27. Каждый вечер, приходя в клуб, n человек случайным образом рассаживаются за круглым столом. Найти вероятность того, что: а) из N посещений клуба не менее M раз два определенных лица окажутся сидящими рядом, б) из N посещений клуба ровно M раз два определенных лица окажутся сидящими рядом.

Варианты 8, 18, 28. Вероятности перегорания первой, второй и третьей лампы соответственно равны p_1, p_2, p_3 . Если перегорает одна лампа, то прибор выходит из строя с вероятностью 0.5, если две или три, то прибор заведомо выйдет из строя. Найти: а) вероятность того, что из N приборов выйдут из строя не более M приборов; б) вероятность того, что частота выхода прибора из строя отклонится от вероятности не более чем на ε, если проверяется работа N приборов.

вар.	n	N	M	вар.	p_1	p_2	p_3	N	M	ε
7	8	100	25	8	0,1	0,2	0,15	300	10	0,04
17	6	80	20	18	0,2	0,2	0,1	250	8	0,03
27	7	100	20	28	0,1	0,3	0,2	350	15	0,05

Варианты 9, 19, 29. Два игрока поочередно (без возвращения) извлекают шары из урны, содержащей m белых и n черных шаров. Выигрывает тот, кто первым вынет белый шар. Найти: а) вероятность того, что в N играх начавший игру участник выиграет M раз; б) вероятность того, что относительная частота выигрыша первого участника в N играх отклонится от вероятности выигрыша первого участника не более чем на ε.

вар.	m	n	N	M	ε
9	2	4	150	100	0,01
19	2	3	200	120	0,02
29	1	4	250	130	0,03

Варианты 10, 20, 30. Из колоды в 36 карт извлекаются наудачу 5 карт. Событие A:

Вариант 10	в полученной выборке 3 карты одной масти
Вариант 20	в полученной выборке окажется хотя бы один туз
Вариант 30	в полученной выборке ровно два туза

Сколько раз надо провести указанный опыт, чтобы отклонение частоты события A от его вероятности не более чем на 0.05 имело вероятность 0.96? Какова вероятность, что при проведении 200 опытов число появлений события A будет не менее 50?

ЗАДАЧА 6.

Случайный вектор (ξ, η) распределен равномерно в области G, изображенной на рисунке на странице 15.

1. Найти плотности распределения вероятностей компонент случайного вектора и решить вопрос об их зависимости (независимости).
2. Выяснить, коррелированы или некоррелированы компоненты случайного вектора (ξ, η).
3. Для нечетных вариантов найти плотность распределения вероятности случайной величины $\xi + \eta$. Для четных вариантов найти плотность распределения вероятности случайной величины $\xi - \eta$.
4. Найти $P\{(\xi, \eta) \in D\}$, где $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$.

ЗАДАЧА 7.

Случайная величина ξ распределена по закону Коши с плотностью $f(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$. Найти плотность случайной величины η.

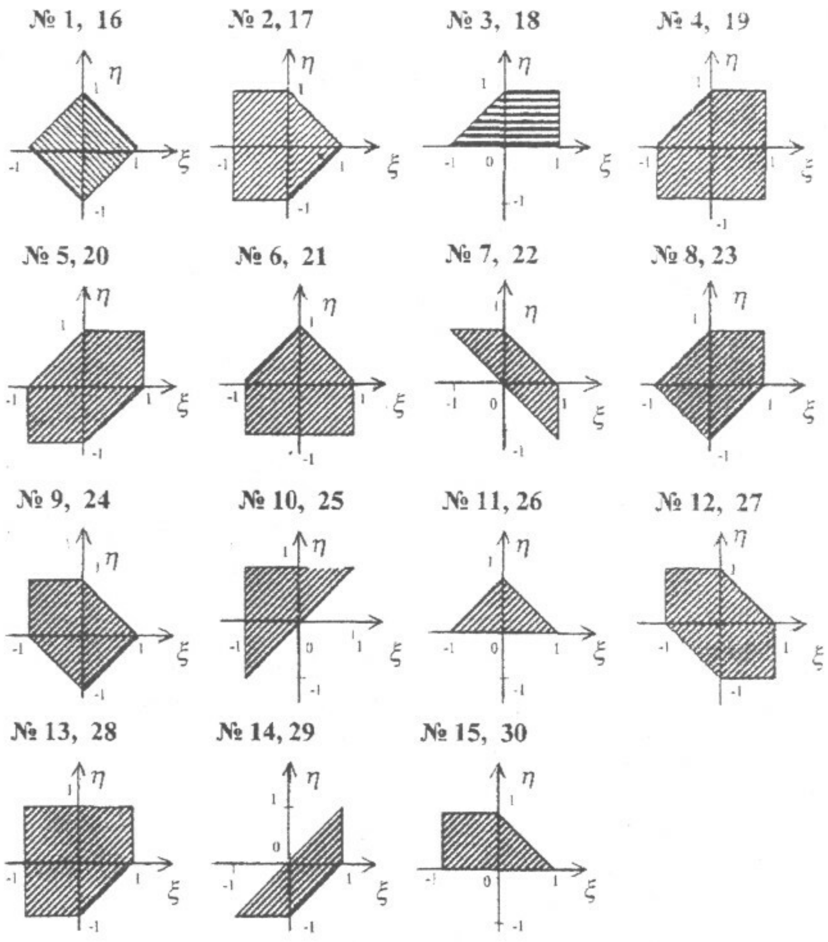
№	η	№	η	№	η	№	η	№	η
1	$1-\xi^2$	2	$\operatorname{arctg}\xi$	3	$4+\xi^3$	4	$\ln\lvert\xi\rvert$	5	ξ^2
6	$2+\lvert\xi\rvert$	7	$1+\xi^2$	8	$2\operatorname{arctg}3\xi$	9	$\ln\lvert 5-\xi\rvert$	10	$1-2\xi^2$
11	$\ln\lvert 1+\xi\rvert$	12	$3-2\lvert\xi\rvert$	13	$\ln\lvert 3-2\xi\rvert$	14	$4-\xi^2$	15	$3\lvert\xi\rvert+2$
16	$3\operatorname{arctg}5\xi$	17	$3-2\xi^2$	18	$\lvert 1-\xi\rvert$	19	$2\ln\lvert 1+3\xi\rvert$	20	$\lvert\xi-3\rvert$
21	$2\lvert\xi\rvert-5$	22	$3\operatorname{arctg}2\xi$	23	$\ln\lvert 2+\xi\rvert$	24	ξ^2+5	25	$\sqrt{\lvert\xi\rvert}$
26	$3-\xi^2$	27	$2\xi^2+3$	28	$\operatorname{arctg}2\xi$	29	$\sqrt{\lvert\xi-3\rvert}$	30	$\lvert\xi\rvert^3-2$

ЗАДАЧА 8а.

Даны независимые случайные величины X_1, X_2, X_3, принимающие два значения 0 и 1, причем $P(X_i = 1) = p_i$. По ним строятся случайные величины Y_1, Y_2, Y_3. Найти:

а) совместное (трехмерное) распределение Y_1, Y_2, Y_3;

Варианты:



б) все двумерные распределения Y_i и Y_j, $i, j = 1, 2, 3$, $i \neq j$;

в) одномерные распределения Y_i, $i = 1, 2, 3$, их математические ожидания и дисперсии;

г) условные вероятности $P(Y_3 = \varepsilon_3 / Y_1 = \varepsilon_1,\ Y_2 = \varepsilon_2)$ и $P(Y_3 = \varepsilon_3 / Y_2 = \varepsilon_2)$ при всех возможных комбинациях значений $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$.

д) ряды распределения случайных величин Y_i+Y_j, $Y_i \cdot Y_j$, $i,j=1,2,3$, $i \neq j$.

№	p_1	p_2	p_3	Y_1	Y_2	Y_3
1	1/3	3/4	2/3	$X_1 * X_2$	$\max(X_2, X_3)$	$X_1 * X_2 * X_3$
2	1/4	3/4	1/3	$\max(X_1, X_2)$	$X_2 * X_3$	$\max(X_1, X_2, X_3)$
3	2/3	1/2	1/4	$X_1 \oplus X_2$	$X_1 \oplus X_2 \oplus X_3$	$X_2 \oplus X_3$
4	3/4	1/3	2/3	$X_1 * X_2$	$X_2 * X_3$	$X_1 \oplus X_3$
5	1/2	1/4	1/3	$\max(X_1, X_2)$	$X_2 \oplus X_3$	$X_2 * X_3$
6	1/3	1/2	1/4	$X_1 \oplus X_2 \oplus X_3$	$X_1 * X_3$	$X_2 \oplus X_3$
7	1/4	2/3	1/2	$X_1 * X_2 * X_3$	$\max(X_1, X_2, X_3)$	$X_1 \oplus X_2 \oplus X_3$
8	2/3	1/3	3/4	$\max(X_1, X_2, X_3)$	$X_1 \oplus X_2$	$X_1 * X_3$
9	3/4	1/4	1/2	$X_1 \oplus (X_2 * X_3)$	$\max(X_1, X_3)$	$\max(X_2, X_3)$
10	1/2	3/4	2/3	$X_1 * \max(X_2, X_3)$	$X_1 \oplus X_3$	$X_2 * X_3$
11	1/3	1/4	2/3	$X_1 * X_3$	$X_1 * X_2$	$X_2 * X_3$
12	1/4	1/3	2/3	$X_1 \oplus X_3$	$X_1 * X_3$	$\max(X_1, X_2)$
13	2/3	1/4	3/4	$X_1 \oplus X_2$	$X_2 \oplus X_3$	$X_1 \oplus X_3$
14	3/4	2/3	1/4	$X_2 * X_3$	$X_1 \oplus X_2 \oplus X_3$	$\max(X_2, X_1 \oplus X_3)$
15	1/2	1/3	2/3	$\max(X_2, X_3)$	$X_1 \oplus X_2$	$X_1 \oplus X_2 \oplus X_3$
16	1/3	3/4	1/2	$X_2 \oplus X_3$	$X_1 * X_2 * X_3$	X_2
17	1/4	1/2	1/3	$X_1 * (X_2 \oplus X_3)$	$\max(X_2, X_3)$	X_3
18	2/3	3/4	1/2	$X_1 \oplus \max(X_2, X_3)$	X_1	$X_1 * X_3$
19	3/4	1/3	1/2	$X_2 * X_3$	$X_1 * X_2 * X_3$	$X_2 \oplus (X_1 * X_3)$
20	1/2	2/3	1/4	$X_2 \oplus X_3$	$\max(X_1, X_2, X_3)$	$\max(X_1, X_2)$
21	1/3	1/4	3/4	$\max(X_1, X_3)$	$\max(X_1, X_2)$	$\max(X_2, X_3)$
22	1/4	3/4	1/2	$X_1 * X_3$	$\max(X_1, X_2)$	$X_2 \oplus X_3$
23	2/3	1/2	1/3	$X_1 \oplus X_3$	$\max(X_1, X_2, X_3)$	$X_2 \oplus X_3$
24	3/4	1/2	2/3	$\max(X_1, X_2, X_3)$	$\max(X_1, X_2)$	$\max(X_2, X_3)$
25	1/2	3/4	1/3	$X_1 * X_2 * X_3$	$\max(X_1, X_2)$	$\max(X_1, X_3)$
26	1/3	2/3	1/2	$\max(X_2, X_3)$	$X_1 * X_2 * X_3$	X_1
27	1/4	3/4	2/3	$X_1 \oplus X_2 \oplus X_3$	$X_2 \oplus X_3$	$\max(X_1, X_3)$
28	2/3	1/3	1/4	$\max(X_1, X_3)$	X_3	$X_1 * X_2$
29	3/4	1/2	1/2	$\max(X_1, X_2 \oplus X_3)$	$X_1 * X_3$	X_2
30	1/2	1/4	3/4	$\max(X_1, X_2 * X_3)$	$X_1 \oplus X_2$	$X_1 \oplus X_3$

где $X_1 \oplus X_2 = \begin{cases} 1, & X_1 \neq X_2 \\ 0, & X_1 = X_2 \end{cases}$, $X_1 * X_2 = \begin{cases} 1, & X_1 = X_2 = 1 \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$

ЗАДАЧА 8б.

Дано распределение случайного вектора (ξ, η). Найти:

а) ряды распределения случайных величин ξ, η;

б) ряды распределения случайных величин $\xi + \eta$ и $\xi \cdot \eta$;

в) математические ожидания, дисперсии, ковариацию ξ и η.

Выяснить, зависимы ли случайные величины ξ и η.

Для вариантов **1-15** выяснить, зависимы ли случайные величины $\xi + \eta$ и $\xi \cdot \eta$.

Для вариантов **16-30** построить распределение случайного вектора $(\xi, \xi + \eta)$.

Варианты 1 и 16

$\xi \backslash \eta$	−1	0	1
−1	1/8	1/4	1/8
0	0	0	0
1	1/4	0	1/4

Варианты 2 и 17

$\xi \backslash \eta$	−1	0	1
−1	1/4	1/4	1/8
0	1/8	1/8	1/8
1	0	0	0

Варианты 3 и 18

$\xi \backslash \eta$	−1	0	1
−1	0	1/8	1/8
0	3/8	0	0
1	1/8	1/8	1/8

Варианты 4 и 19

$\xi \backslash \eta$	−1	0	1
−1	1/8	1/4	1/4
0	0	0	0
1	1/8	1/4	0

Варианты 5 и 20

$\xi \backslash \eta$	−1	0	1
1	1/4	1/4	0
0	1/8	1/8	0
2	1/8	0	1/8

Варианты 6 и 21

$\xi \backslash \eta$	−1	0	1
1	1/4	1/8	1/8
0	0	1/4	0
2	1/8	1/8	0

Варианты 7 и 22

$\xi \backslash \eta$	−1	0	1
1	1/4	1/4	0
0	1/8	0	1/8
2	1/8	1/8	0

Варианты 8 и 23

$\xi \backslash \eta$	1	0	2
1	1/4	1/8	1/8
0	1/8	0	0
2	1/4	0	1/8

Варианты 9 и 24

$\xi \backslash \eta$	1	0	2
1	1/8	1/4	1/8
0	0	0	0
2	1/4	0	1/4

Варианты 10 и 25

$\xi \backslash \eta$	1	0	2
1	1/4	1/4	1/8
0	1/8	1/8	1/8
2	0	0	0

Варианты 11 и 26

$\xi \backslash \eta$	1	0	2
−1	1/8	1/8	1/8
0	3/8	0	0
1	1/8	0	1/8

Варианты 12 и 27

$\xi \backslash \eta$	−1	0	1
−1	1/8	1/4	1/4
0	0	0	0
1	0	1/4	1/8

Варианты 13 и 28

$\xi \backslash \eta$	−1	0	2
−1	1/4	1/4	0
0	1/8	1/8	0
1	1/8	1/8	0

Варианты 14 и 29

$\xi \backslash \eta$	−1	0	2
−1	1/4	1/8	1/8
0	0	1/4	0
1	1/8	0	1/8

Варианты 15 и 30

$\xi \backslash \eta$	−1	0	1
−1	1/4	0	1/4
0	0	1/4	0
1	0	1/4	0

ЗАДАЧА 9. Проверка статистических гипотез.

По данным группированной выборки случайной величины X:
1) построить гистограмму;
2) найти точечные оценки математического ожидания M_X и дисперсии D_X;
3) построить теоретическую кривую нормального распределения с полученными значениями математического ожидания и дисперсии;
4) проверить гипотезу о нормальном распределении с помощью критерия χ^2 ("хи-квадрат") при 5% уровне значимости.

N	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6	n_7	N	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6	n_7
1	6	26	82	132	76	28	8	16	16	64	152	304	164	52	12
2	3	13	41	76	38	14	4	17	6	26	82	132	76	28	8
3	9	39	123	228	114	42	12	18	3	13	41	76	38	14	4
4	8	28	76	132	82	26	6	19	9	39	123	228	114	42	12
5	4	14	38	76	41	13	3	20	8	28	76	132	82	26	6
6	12	42	114	228	123	39	9	21	4	14	38	76	41	13	3
7	12	52	164	304	152	64	16	22	12	42	114	228	123	39	9
8	16	64	152	304	164	52	12	23	12	52	164	304	152	64	16
9	6	26	82	132	76	28	8	24	16	64	152	304	164	52	12
10	3	13	41	76	38	14	4	25	6	26	82	132	76	28	8
11	9	39	123	228	114	42	12	26	3	13	41	76	38	14	4
12	8	28	76	132	82	26	6	27	9	39	123	228	114	42	12
13	4	14	38	76	41	13	3	28	8	28	76	132	82	26	6
14	12	42	114	228	123	39	9	29	4	14	38	76	41	13	3
15	12	52	164	304	152	64	16	30	12	42	114	228	123	39	9

Здесь N - номер варианта,
n_1 - число значений выборки в интервале (N-18,N-16),
n_2 - число значений выборки в интервале (N-16,N-14),
n_3 - число значений выборки в интервале (N-14,N-12),
n_4 - число значений выборки в интервале (N-12,N-10),
n_5 - число значений выборки в интервале (N-10,N-8),
n_6 - число значений выборки в интервале (N-8,N-6),
n_7 - число значений выборки в интервале (N-6,N-4).

СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

ТИПОВОЙ РАСЧЕТ

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

1. Простая однородная цепь Маркова с двумя состояниями имеет матрицу перехода $\begin{pmatrix} p_1 & 1-p_1 \\ 1-p_2 & p_2 \end{pmatrix}$, $0 < p_1 < 1$, $0 < p_2 < 1$.
а) Составить характеристическое уравнение и найти характеристические числа матрицы. б) Найти предельные вероятности.

2. Плотности переходов марковского процесса с тремя состояниями $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ $\lambda_{12} = \lambda_{23} = 0$, $\lambda_{13} = \lambda_{21} = \lambda_{31} = \lambda_{32} = 1$. В начальный момент система находилась в состоянии ω_1. Найти нестационарные и стационарные распределения.

3. Доказать, что корреляционная функция случайного процесса $\xi(t)$ равна корреляционной функции центрированного случайного процесса $\xi(t) - M\xi(t)$.

4. Найти корреляционную функцию случайного процесса $\xi(t)$, который может принимать только два значения: $+1$ и -1. Число перемен знака за время t – пуассоновски распределенная случайная величина с параметром λt, а $M\xi(t) = 0$.

5. Доказать, что случайный процесс $\xi \cos t$ не является стационарным.

6. При каких условиях для случайных величин ξ и η случайный процесс $\xi \cos t + \eta \sin t$ будет стационарным?

7. Среднее время безотказной работы ЭВМ равно $1/\lambda$, поток отказов пуассоновский. Если в машине происходит отказ, то она останавливается и неисправность устраняется. Поток восстановления пуассоновский с параметром μ. Определить вероятность того, что в момент времени t ЭВМ будет работать, если она в момент времени $t = 0$ работала.

8. На телефонную станцию поступают вызовы с интенсивностью $\lambda = 10$ вызовов в минуту. Считаем поток вызовов пуассоновским. Если в момент поступления вызова на станции имеются свободные линии, то происходит подключение абонента к одной из них и начинается разговор, средняя длительность которого равна 3 мин. Время обслуживания распределено по показательному закону. Ес-