

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

ЗАДАЧА 1. Решить уравнение. Изобразить решения на комплексной плоскости.

N	уравнение	N	уравнение
1	$z^6 + 2z^3 + 1 = 0$	16	$z^4 + 2z^2 + 4 = 0$
2	$e^{2z} + 2e^z - 3 = 0$	17	$\operatorname{sh} iz + \cos z = -1 + i\sqrt{3}$
3	$\sin z - i \cos z = 1$	18	$\sin z + i = 0$
4	$z^8 + [(1+i)/(1-i)]^2 = 0$	19	$z^4 - z^2 + 1 = 0$
5	$e^z + i\sqrt{2} = 1$	20	$\operatorname{sh} z + \cos iz = 1 - i$
6	$\sin z = -2$	21	$\cos z + i = 0$
7	$z^6 - 2iz^3 - 1 = 0$	22	$z^2 - 2zi^{(1+i)} + i^{2(1+i)} = 0$
8	$e^{2z} + (1-2i)e^z - 1 - i = 0$	23	$\operatorname{ch} z - \operatorname{sh} z = \sqrt{3} - i$
9	$\cos z = 3$	24	$z^8 + 2z^4 + 1 = 0$
10	$z^6 + 16iz^3 - 64 = 0$	25	$z^2 + 2zi^{(1-i)} + i^{2(1-i)} = 0$
11	$\operatorname{ch} z - \operatorname{sh} z = \sqrt{3} + i$	26	$e^z + \sqrt{3} = \sqrt{2}$
12	$\cos^2 z - \sin^2 z = i$	27	$z^2 - i^2/i = 0$
13	$z^6 - i(2+i)/(1-2i) = 0$	28	$e^{2z} - 2e^z + 2 = 0$
14	$i \sin z + \cos z = -1 + i$	29	$z^2 + (3+i)/(1-3i) = 0$
15	$\sin z \cos z = i/2$	30	$e^{2z} - 3e^z - 4 = 0$

ЗАДАЧА 2. При каких значениях константы a функция $u(x, y)$ (четные варианты) или $v(x, y)$ (нечетные варианты) является вещественной или соответственно мнимой частью некоторой регулярной функции $f(z)$? Восстановить $f(z)$.

N	$u(x, y), v(x, y)$	N	$u(x, y), v(x, y)$	N	$u(x, y), v(x, y)$
1	$e^{-y}(x \cos x - y \sin ax)$	11	$\sin x \cdot \operatorname{ch} ay$	21	$3y/(4x^2 - ay^2)$
2	$\cos ay \cdot \operatorname{ch} x$	12	$\cos x \cdot \operatorname{ch} ay$	22	$\cos ax \cdot \operatorname{sh}(ay+2)$
3	$e^x(y \cos y + x \sin ay)$	13	$2y/(3x^2 - ay^2)$	23	$\sin 3y \cdot \operatorname{sh} ax$
4	$e^{-2y} \cos ax$	14	$e^{-y} \sin x + ay$	24	$y/(2x^2 + ay^2)$
5	$\sin y \operatorname{ch} ax$	15	$\cos x \cdot \operatorname{ch}(y-a)$	25	$\sin 2ax \cdot \operatorname{sh} y$
6	$x \sin x \operatorname{ch} ay - y \cos x \operatorname{sh} y$	16	$e^{-y} \cos x + ax$	26	$2x/(x^2 + ay^2)$
7	$y/(ax^2 + y^2)$	17	$\sin ay \cdot \operatorname{ch} x$	27	$x^2 - (ay - 1)^2$

N	$u(x, y)$	N	$u(x, y)$	N	$u(x, y)$
8	$x \sin x \operatorname{ch} y + y \cos x \operatorname{sh} ay$	18	$x/(ax^2 - y^2)$	28	$\cos(ax+2) \cdot \operatorname{ch} y$
9	$\cos ax \cdot \operatorname{ch}(2y+1)$	19	$3y/(2x^2 - ay^2)$	29	$ax^2 + 4y^2$
10	$1 - e^{ax} \sin y$	20	$\sin ax \cdot \operatorname{ch} 3y$	30	$ax^2 - y^2 - x$

ЗАДАЧА 3. Получить все разложения $f(z)$ в ряд Лорана по степеням $z - z_0$. Если z_0 - особая точка, указать тип этой особой точки и найти $\operatorname{res}_{z=z_0} f(z)$.

N	z_0	$f(z)$	N	z_0	$f(z)$
1	-1	$\frac{z-1}{z(z+1)}$	2	-2	$\frac{z^2+2z-4}{z^2(z-2)}$
3	2	$\frac{2z^2-5z+4}{z(z-2)^2}$	4	-3-2i	$\frac{z+1}{z(z-1)}$
5	1	$\frac{z+2}{z^2-1}$	6	2	$\frac{z}{(z+2)(z+3)}$
7	-1	$\frac{3z-1}{z^2-2z-3}$	8	0	$\frac{z}{z^2+4}$
9	1	$\frac{2z^2-z+1}{z^3-z}$	10	0	$\frac{2z-3}{z^2-3z+2}$
11	-2	$\frac{2z^2+z+2}{z^2(z+2)}$	12	-1	$\frac{z^3+3z^2+2z+1}{z^2(z+1)^2}$
13	1	$\frac{e^z}{(z-1)^2}$	14	1	$\frac{3z^2-1}{z(z^2-1)}$
15	2	$\frac{z^2-3z+5}{(z+1)(z-2)^2}$	16	3	$\frac{1}{z^2-7z+12}$
17	0	$\frac{z^2+z+1}{z^3+z}$	18	-1	$\frac{2}{z^2-4z+3}$
19	-3	$\frac{2z^2+z+3}{z^2(z+3)}$	20	-1	$\frac{z^2+z-1}{z^2(z-1)}$
21	0	$\frac{2z^2+5z+4}{z^2(z+4)}$	22	0	$\frac{1}{z^2-5z+6}$
23	0	$\frac{3z^2-1}{z^2(z-1)}$	24	-1	$\frac{2z^2+4z+1}{z(z+1)^2}$
25	3	$\frac{9-2z}{z(3-z)^2}$	26	-2-2i	$\frac{z+3}{z^2-1}$
27	0	$\frac{z^2}{z^2+9}$	28	-3+2i	$\frac{2z}{z^2+4}$
29	-2-3i	$\frac{z-1}{z^2+2z}$	30	2-2i	$\frac{z-2}{z^2-2z-3}$

ЗАДАЧА 4. Данную функцию разложить в ряд Лорана и найти $\text{res}_{z_0} f(z)$.

N	$f(z)$	z_0	N	$f(z)$	z_0
1	$z \cos \frac{1}{z-2}$	2	2	$\sin \frac{z}{z-1}$	1
3	$ze^{z/(z-5)}$	5	4	$\sin \frac{2z-1}{z+2}$	-2
5	$\cos \frac{3z}{z-i}$	i	6	$\sin \frac{5z}{z-2i}$	2i
7	$\sin \frac{3z-i}{3z+i}$	$-\frac{i}{3}$	8	$z \cos \frac{3z}{z-1}$	1
9	$z \sin \frac{z}{z-1}$	1	10	$(z-3) \cos \frac{\pi(z-3)}{z}$	0
11	$z^2 \sin \frac{\pi(z+1)}{z}$	0	12	$z \cos \frac{z}{z+2i}$	-2i
13	$\cos \frac{z^2-4z}{(z-2)^2}$	2	14	$\sin \frac{z+i}{z-i}$	i
15	$\sin \frac{z}{z-3}$	3	16	$ze^{1/(z-2)}$	2
17	$e^{z/(z-3)}$	3	18	$\sin \frac{2z}{z-4}$	4
19	$\sin \frac{z^2-4z}{(z-2)^2}$	2	20	$e^{(4z-2z^2)/(z-1)^2}$	1
21	$ze^{\pi/(z-a)}$	a	22	$ze^{\pi z/(z-\pi)}$	π
23	$z \sin \frac{\pi(z+2)}{z}$	0	24	$z \cos \frac{\pi(z+3)}{z-1}$	1
25	$z^2 \sin \frac{z+3}{z}$	0	26	$z \sin \frac{z^2-2z}{(z-1)^2}$	1
27	$z \cos \frac{z}{z-3}$	3	28	$z \sin \frac{\pi(z-1)}{z-2}$	2
29	$\frac{\sin^2 z}{z}$	0	30	$\frac{\sin^2(2/z)}{z}$	0

ЗАДАЧА 5. Вычислить интеграл по замкнутому контуру $\oint_{C^+} f(z) dz$ с помощью вычетов.

N	$f(z)$	C	N	$f(z)$	C
1	$\frac{z^2+1}{(2z+3)z^2}$	$ z+1 =2$	2	$\frac{\sin z}{z^2(z+4)^2}$	$ z+2 =3$
3	$\frac{\text{sh } z}{(z^2+4)(z^2-9)}$	$ z-3-4i =5$	4	$\frac{1}{z^4+1}$	$ z-1 =1$
5	$\frac{z(z+1)^2}{\sin^2(2\pi z)}$	$ z-1/4 =1/3$	6	$\frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)}$	$ z-1-i =2$
7	$\frac{\cos z}{z^3-z^2-2z}$	$ z-i =2$	8	$\frac{(z^2+9)^2}{\text{ch } z}$	$ z+3i =3$
9	$\frac{\text{tg } z}{z(z-\pi/4)^2}$	$ z-1-i =\sqrt{3}$	10	$\frac{e^z-1}{z(z^2+2z+5)^2}$	$ z-i =2$
11	$\frac{e^z}{z^4+8z^2-9}$	$ z-1-2i =5/2$	12	$\frac{\sin(2z)}{z^2(z^2+4)}$	$ z-2i =3$
13	$\frac{\sin z}{z^2(z-2)^2}$	$ z-2-2i =3$	14	$\frac{z}{(z^2-1)(z-2)^2}$	$ z-2 =3/2$
15	$\frac{z^3}{z^4-1}$	$ z+1-i =\sqrt{2}$	16	$\frac{1-e^{4z}}{z(z^2-16)}$	$ z+2 =3$
17	$\frac{\cos z}{z^2(z+1)}$	$ z+1-i =5/4$	18	$\frac{\text{sh } z}{z(z^2+2z+5)}$	$ z+i =2$
19	$\frac{e^z}{z(z-1)^2(z-4)}$	$ z-1-i =2$	20	$\frac{z(\sin z+2)}{\sin z(z-1)^2}$	$ z-3/2 =2$
21	$\frac{z+1}{z(z-1)^2(z-3)}$	$ z-2-i =2$	22	$\frac{e^z}{z^2(z-\pi i)}$	$ z =4$
23	$\frac{\sin^3(z+2)}{(z+2)^2(z-3)^2}$	$ z+1 =5$	24	$\frac{e^z-1}{z^3(z-2)}$	$ z-2 =3$
25	$\frac{z-\sin z}{z^3 \sin(\pi z)}$	$ z =3/2$	26	$\frac{\cos(z+2)-1}{(z+2)^2(z-3)^2}$	$ z-1-i =3$
27	$\frac{e^z-1}{(z^2-1)^2 z}$	$ z-2 =5/2$	28	$\frac{\sin(3z)}{z(z^2-4)^2}$	$ z-1 =2$
29	$\frac{1-\cos(2z)}{z^3(z^2+1)}$	$ z-i =3/2$	30	$\frac{e^z-1}{z(z^2+9)^2}$	$ z-2 =3$

ЗАДАЧА 6. Вычислить несобственный интеграл $\int_a^b f(x) dx$ с помощью вычетов.

N	$f(x)$	(a, b)	N	$f(x)$	(a, b)
1	$\frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+9)}$	$(0, +\infty)$	2	$\frac{(x-3)e^{ix}}{x^2-6x+45}$	$(-\infty, +\infty)$
3	$\frac{e^{ix}}{x^2-2ix-2}$	$(-\infty, +\infty)$	4	$\frac{(x+1)\cos 3x}{x^2+4x+104}$	$(-\infty, +\infty)$
5	$\frac{(x+1)\sin 2x}{x^2+2x+2}$	$(-\infty, +\infty)$	6	$\frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}$	$(-\infty, +\infty)$
7	$\frac{(x-1)\cos x}{x^2-4x+5}$	$(-\infty, +\infty)$	8	$\frac{(x^2+2)}{x^4-2ix(x^2+1)-1}$	$(-\infty, +\infty)$
9	$\frac{x^2+1}{x^4+1}$	$(0, +\infty)$	10	$\frac{x^3\sin x}{x^4+5x^2+4}$	$(-\infty, +\infty)$
11	$\frac{1}{x^4-(4ix+5)^2}$	$(-\infty, +\infty)$	12	$\frac{x\sin x}{x^2+2x+10}$	$(-\infty, +\infty)$
13	$\frac{1}{(x^2+1)^3}$	$(0, +\infty)$	14	$\frac{(x^2+2)}{(x^2-2ix-5)(x^2+4)}$	$(-\infty, +\infty)$
15	$\frac{x\cos x}{x^2-2x+10}$	$(-\infty, +\infty)$	16	$\frac{x^2}{(x^2+4)^3}$	$(0, +\infty)$
17	$\frac{(x^3+5x)\sin x}{x^4+10x^2+9}$	$(-\infty, +\infty)$	18	$\frac{(x+5)}{(x^2-4ix-13)^3}$	$(-\infty, +\infty)$
19	$\frac{e^{ix}}{(x^2+4ix-5)^3}$	$(-\infty, +\infty)$	20	$\frac{x^2}{x^4-4ix(x^2+4)-16}$	$(-\infty, +\infty)$
21	$\frac{x\sin x}{x^2+9}$	$(0, +\infty)$	22	$\frac{\cos x}{x^2+4}$	$(0, +\infty)$
23	$\frac{x^4+1}{x^6+1}$	$(-\infty, +\infty)$	24	$\frac{x\sin x}{(x^2+1)^2}$	$(0, +\infty)$
25	$\frac{x^2}{x^4-(2ix+3)^2}$	$(-\infty, +\infty)$	26	$\frac{(x-1)e^{ix}}{x^2-2x+2}$	$(-\infty, +\infty)$
27	$\frac{2x^2+13x}{x^4+13x^2+36}$	$(-\infty, +\infty)$	28	$\frac{(x-3)e^{ix}}{x^2-6x+409}$	$(-\infty, +\infty)$
29	$\frac{\cos x}{(x^2+1)^3}$	$(0, +\infty)$	30	$\frac{(x^3-2)\cos(x/2)}{(x^2+2)(x^2+9)}$	$(-\infty, +\infty)$

ЗАДАЧА 7. С помощью теоремы Руше найти число корней уравнения в указанной области.

1	$z^5 - 5z^2 + 2z + 1 = 0$	$1 < z < 2$
2	$z^6 - 7z^5 + 3z^3 - z - 1 = 0$	$1 < z < 2$
3	$z^4 - 5z^3 - z^2 - 1 = 0$	$1/2 < z < 1$
4	$2z^5 - 3z^3 + 2z^2 - 5 = 0$	$1/2 < z < 2$
5	$3z^4 + 2z^3 - z^2 - z + 3 = 0$	$1/2 < z < 2$
6	$2z^3 - 7z^2 + 3z + 1 = 0$	$1 < z < 4$
7	$2z^5 - 8z^4 + z^3 + 2z^2 + z - 1 = 0$	$1 < z < 2$
8	$z^5 - 4z^3 - 10z^2 + 3 = 0$	$1 < z < 3$
9	$3z^6 - 4z^4 + 5z^2 - 15z - 1 = 0$	$1 < z < 2$
10	$2z^4 + 4z^3 - 17z^2 + 3z - 7 = 0$	$1 < z < 5$
11	$5z^5 + 4z^4 - 3z^3 - 2z^2 - 17 = 0$	$1 < z < 2$
12	$z^8 - 3z^5 + 2z^2 - 12z - 3 = 0$	$1 < z < 2$
13	$5z^4 + 2z^3 - 13z^2 + 4z + 1 = 0$	$1 < z < 2$
14	$2z^4 + 3z^3 - z^2 + 11z - 1 = 0$	$1/2 < z < 3$
15	$2z^5 - 5z^4 + 5z - 1 = 0$	$2 < z < 3$
16	$z^6 - 10z^3 + 2z^2 + 3z - 1 = 0$	$2 < z < 3$
17	$z^7 - 5z^5 + 2z^4 + 1 = 0$	$1 < z < 3$
18	$3z^7 + z^6 - 9z^4 + 2z^2 - 2 = 0$	$1 < z < 2$
19	$10z^4 - z^3 + 4z^2 - z - 3 = 0$	$1/2 < z < 1$
20	$2z^3 - 3z^2 - 7z - 1 = 0$	$1 < z < 3$
21	$z^5 + 2z^4 - z^3 - 3z^2 + 13z - 5 = 0$	$1 < z < 4$
22	$z^5 - 2z^2 + 5z + 1 = 0$	$1 < z < 2$
23	$z^4 - 6z^3 + z^2 - 10z + 1 = 0$	$1 < z < 2$
24	$z^3 - 17z^2 + 25z - 5 = 0$	$1 < z < 2$
25	$4z^3 + 10z^2 - 3z + 1 = 0$	$2 < z < 3$
26	$3z^3 + 9z^2 - 5z - 1 = 0$	$2 < z < 4$
27	$2z^4 - z^3 + 6z^2 - z - 1 = 0$	$1/4 < z < 1$
28	$z^6 - 5z^3 + z^2 + 1 = 0$	$1/2 < z < 1$
29	$z^3 - 2z - 5 = 0$	$1 < z < 3$
30	$z^8 + 5z^7 - z^4 + 2 = 0$	$4 < z < 6$

ЗАДАЧА 8. С помощью вычетов найти:
оригинал изображения $g(p)$ (варианты 1,4,5,8,9,12,13,16,17,20,21,

24,25,28);

косинус-преобразование Фурье функции $f(x)$ (варианты 2,6,10,14, 18,22,26,29);синус-преобразование Фурье функции $f(x)$ (варианты 3,7,11,15,19, 23,27,30).

N	$g(p)$	N	$f(x)$	N	$f(x)$	N	$f(x)$
1	$\frac{p}{p^3+1}$	2	$\frac{1}{(1+x^2)^3}$	3	$\frac{x^3}{1+x^6}$	4	$\frac{p}{p^2-2p+5}$
5	$\frac{p}{(p^2+4)^2}$	6	$\frac{1}{(1+x^2)^2}$	7	$\frac{x}{(1+x^2)^2}$	8	$\frac{1}{p^3+2p^2+p}$
9	$\frac{1}{(p^3-8)^2}$	10	$\frac{x^2}{(1+x^2)^2}$	11	$\frac{x}{(1+x^2)(9+x^2)}$	12	$\frac{p}{(p-1)^3(p+2)^2}$
16	$\frac{p}{p^4-1}$	14	$\frac{1}{(1+x^2)(4+x^2)}$	15	$\frac{x^3}{(1+x^2)^3}$	13	$\frac{p-1}{(p^2+1)(p+1)}$
17	$\frac{p}{p^4+1}$	18	$\frac{1}{1+x^4}$	19	$\frac{x}{1+x^4}$	20	$\frac{p-3}{(p^2+2p+5)}$
21	$\frac{1}{(p+1)^3}$	22	$\frac{x^2}{1+x^4}$	23	$\frac{x^3}{1+x^4}$	24	$\frac{4-p-p^2}{p^3-p^2}$
25	$\frac{p^2}{p^6-1}$	26	$\frac{x^2}{1+x^6}$	27	$\frac{x}{1+x^6}$		
28	$\frac{1}{p(p-1)^3}$	29	$\frac{1}{1+x^2}$	30	$\frac{x}{1+x^2}$		

ЗАДАЧА 9. Определить множество D_2 плоскости W , на которое отобразится множество D_1 плоскости Z заданной функцией $\omega = f(z)$. Начертите D_1 и D_2 .

N	$f(z)$	D_1
1	$(\sqrt{3}+i)z^2+1+5i$	$1/2 < z < 1, \quad 0 \leq \arg z < \pi/4$
2	$(2-2i)z^3+2-i$	$1 < z , \quad \pi/4 < \arg z \leq 3\pi/4$
3	e^z+i-1	$0 < \operatorname{Re} z \leq 2, \quad -\pi/6 < \operatorname{Im} z \leq \pi/6$
4	$\ln z+1-i$	$1 \leq z < 2, \quad -\pi/6 \leq \arg z < \pi/6$
5	$(-\sqrt{3}-i)z^2-1-5i$	$1 \leq z < 2, \quad -\pi/4 < \arg z \leq 0$
6	$2e^z+3-2i$	$\operatorname{Re} z < 0, \quad \pi/3 \leq \operatorname{Im} z < 2\pi/3$

N	$f(z)$	D_1
7	$e^{2zi+i\pi/4}+3i$	$-\pi/4 < \operatorname{Re} z \leq \pi/2, \quad 0 < \operatorname{Im} z$
8	$\ln(iz)-1+5i$	$2 \leq z < 3, \quad 0 \leq \arg z < \pi/4$
9	$(-2+2i)z^3-2+i$	$2 < z \leq 3, \quad -3\pi/4 < \arg z \leq -\pi/4$
10	$e^{z+i\pi/3}+2-4i$	$1 \leq \operatorname{Re} z < 3, \quad -\pi/4 < \operatorname{Im} z \leq \pi/3$
11	$\ln(2z)-3+2i$	$ z < 1, \quad -\pi/4 \leq \arg z \leq \pi/3$
12	$\ln(-z)-2+3i$	$1 \leq z < 3, \quad -\pi/2 \leq \arg z < -\pi/4$
13	$(\sqrt{3}-i)z^2-3i$	$2 < z \leq 5, \quad \pi/6 \leq \arg z < \pi/3$
14	$e^{iz+1\pi/8}+1+2i$	$0 \leq \operatorname{Re} z \leq \pi/4, \quad \operatorname{Im} z < 1$
15	$\ln(3z)-1-6i$	$1 \leq z , \quad \pi/4 < \arg z \leq 2\pi/3$
16	$(-1-i)z^3+6-i$	$ z < 2, \quad \pi/4 \leq \arg z \leq \pi/2$
17	$e^{-z+i3\pi/2-2-3i}$	$0 < \operatorname{Re} z \leq 1, \quad \pi/6 \leq \operatorname{Im} z < \pi/3$
18	$(1+i)\ln z-2$	$1 < z \leq 3, \quad 0 < \arg z \leq \pi/6$
19	$(-\sqrt{3}+i)z^3-2i$	$1 \leq z \leq 3, \quad \pi/2 < \arg z < 2\pi/3$
20	$e^{3iz-i\pi/4}-i$	$0 < \operatorname{Re} z \leq \pi/6, \quad 2 < \operatorname{Im} z$
21	$(1-i)\ln(2z)+i$	$2 \leq z < 3, \quad \pi/3 < \arg z \leq \pi/2$
22	$(1-i)z^4-2+3i$	$1 < z , \quad 2\pi/3 \leq \arg z \leq \pi$
23	$e^{2z+i\pi/2}+1+3i$	$1 \leq \operatorname{Re} z < 2, \quad 3\pi/4 \leq \operatorname{Im} z < \pi$
24	$i\ln(3z)-2-3i$	$2 \leq z , \quad \pi/6 < \arg z \leq \pi/4$
25	$(2-2i)z^2+5-i$	$ z \leq 3, \quad \pi/6 \leq \arg z < \pi/2$
26	$e^{-2iz+i\pi/4}-1-3i$	$\pi/3 \leq \operatorname{Re} z \leq \pi/2, \quad 2 < \operatorname{Im} z$
27	$-i\ln(iz)+1$	$1 < z \leq 2, \quad -\pi/4 \leq \arg z < -\pi/6$
28	$(1+i)z^4-3+2i$	$ z < 1, \quad -\pi/6 \leq \arg z < 0$
29	$e^{-1z-i\pi/2}+5i$	$0 < \operatorname{Re} z \leq \pi/3, \quad \operatorname{Im} z \leq 2$
30	$2\ln(3iz)-2+4i$	$2 \leq z < 4, \quad -\pi/3 < \arg z \leq -\pi/6$

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ (ЗАЧЕТУ)

1. Комплексные числа и действия над ними. Тригонометрическая и показательная форма комплексного числа. Корни n -ой степени из комплексного числа.

2. Определение регулярной (аналитической) функции комплексного переменного. Условия Коши-Римана.